SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

N. GAROFALO

SVILUPPI RECENTI IN ANALISI ARMONICA
(II Parte)

4 GIUGNO 1987

2. TEOREMI DI RESTRIZIONE DELLA TRASFORMATA DI FOURIER E LORO APPLICAZIONE AD ALCUNI PROBLEMI PER EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

Il primo problema che intendo discutere in questa nota è quello dell'unicità per equazioni alle derivate parziali (di tipo ellittico o iperbolico) del secondo ordine, e metterne in luce il legame con il problema della restrizione discusso nella nota $[G]_1$. Consideriamo l'operatore di Schrödinger stazionario

$$H = -\Delta + V, \tag{2.1}$$

dove V è un potenziale che si supporrà appartenente a un'opportuna classe funzionale. Diciamo che H ha la *proprietà d'unicità* se dato un aperto connesso $\Omega \subset R^n$ l'unica soluzione di $Hu = 0$ in Ω che può annullarsi su un sottoinsieme aperto $\Omega' \subset \Omega$ è quella identicamente nulla. Sapere che una certa classe di operatori di Schrödinger possiede la proprietà d'unicità è un problema di notevole interesse, tanto matematico che fisico. Infatti, tale proprietà è legata all'assenza di autovalori positivi per l'operatore H, il che comporta, se il potenziale tende a zero all'infinito in modo opportuno, che l'intersezione dello spettro puntuale e dello spettro assolutamente continuo di H è o vuoto, oppure costituito dal solo zero, cfr. [RS] . Un'esposizione dei risultati più recenti sull'unicità per operatori ellittici del secondo ordine è stata fatta in $[G]_{2,3}$, e io rinvio a quella sede e ai lavori [JK], $[K]_{1,2}$, per quanto riguarda i risultati stessi, loro estensioni, e la bibliografia. Nel seguito mi limiterò a presentare uno dei possibili approcci al problema dell'unicità. Tale approccio si basa su opportune stime a priori di tipo Carleman che vengono dimostrate facendo uso del Lemma di Tomas-Stein (cfr. la prova del Teorema 1.5 in $[G]_1$), e sue generalizzazioni.

Supponiamo di voler studiare il problema dell'unicità per l'operatore H con un potenziale $V \in L^p_{loc}(R^n)$. E' noto che in tal caso l'esponente soglia (almeno per quanto riguarda l'unicità forte, cfr. [JK]) è $p = \frac{n}{2}$.

Un caso particolare di un teorema dimostrato in [KRS] è il seguente

Teorema 2.1. *Siano* $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\ \frac{1}{p}-\frac{1}{p'}=\frac{2}{n}$. *Allora esiste una costante* $C=C(n)>0$, *tale che per ogni* $\lambda\in R$

$$(2.2)\qquad \|e^{\lambda x_n}u\|_{p'}\le C\|e^{\lambda x_n}\Delta u\|_p\ ,\quad u\in C_0^\infty(R^n).$$

E' noto (cfr. [KRS])che la (2.2) ha come conseguenza diretta il seguente risultato globale di unicità

Teorema 2.2. *Sia* $V\in L^{\frac{n}{2}}(R^n)$ *e sia* $u\in H^{2,p}(R^n)$ *una soluzione di* $Hu=-\Delta u+Vu=0$. *Se il* supp u *giace da un solo lato di un iperpiano in* R^n, *allora* $u\equiv 0$ *in* R^n.

Usando un'idea di Nirenberg basata sulla riflessione lungo una superficie strettamente convessa si può dimostrare che la (2.2) implica anche il seguente risultato locale

Teorema 2.3. *Sia* $V\in L^{\frac{n}{2}}(R^n)$, *sia* $\Omega\subset R^n$ *un aperto connesso e sia* $u\in H^{2,p}_{loc}(\Omega)$ *una soluzione di* $Hu=0$ *in* Ω. *Se* u *si annulla in un sottoinsieme aperto* Ω' *di* Ω, *allora dev'essere* $u\equiv 0$ *in* Ω.

Per le dimostrazioni dei Teoremi 2.2 e 2.3 si rinvia a [KRS]. Va osservato che una versione più forte del Teorema 2.3 era già stata dimostrata in [JK], ma usando idee diverse da quelle che appaiono in [KRS].

Consideriamo la (2.2). Se in essa poniamo $v={}^{\lambda x_n}u$, allora $v\in C_0^\infty(R^n)$ e (2.2) si riduce a

$$(2.3)\qquad \|v\|_{p'}\le C\|\Delta v-2\lambda\partial_n v+\lambda^2 v\|_p\ ,\quad v\in C_0^\infty(R^n),$$

dove $\partial_n v=\frac{\partial v}{\partial x_n}$. Ora ponendo $u(x)=v(\lambda x)$ e usando il fatto che $\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}=\frac{2}{n}$, ci

si riduce a dimostrare la seguente disuguaglianza di tipo Sobolev

Teorema 2.4. *Esiste* $C = C(n)>0$ *tale che*

(2.4) $\|u\|_{p'} \leq C \,\|(\Delta-2\partial_n + 1)u\|_p \quad , \quad u\in C_0^\infty(R^n).$

Consideriamo la funzione $m(\xi) = \dfrac{1}{4\pi^2|\xi|^2-1+4\pi i\xi_n}$ definita per $\xi_n \neq 0$ e $4\pi^2|\xi|^2 \neq 1$. E' chiaro che la (2.4) è equivalente al seguente risultato di moltiplicazione della trasformata di Fourier

(2.5) $\|(m\hat{v})^{\vee}\|_{p'} \leq C \,\|v\|_p \quad , \quad v\in C_0^\infty(R^n),$

dove abbiamo denotato con $^{\vee}$ la trasformata inversa di Fourier. Vogliamo ora esporre l'idea che è dietro la dimostrazione di (2.5). Anzitutto osserviamo che se T è l'operatore definito da

$$\widehat{Tv} = m\hat{v} \ ,$$

allora provare la (2.5) equivale a dimostrare che $T : L^p(R^n) \to L^{p'}(R^n)$ con continuità. Ora sia $\xi = (\xi',\xi_n)$ e scegliamo $\chi\in C_0^\infty(R)$ tale che $\chi(t) = 1$ se $|t|\leq 10^{-2}$ e $\chi(t)\equiv 0$ se $|t|\geq 2.10^{-2}$. Se $\psi(\xi) = \chi(1-2\pi|\xi'|)\chi(\xi_n)$, poniamo

$$m_1(\xi) = \psi(\xi)\, m(\xi)$$

$$m_2(\xi) = [1-\psi(\xi)]\, m(\xi).$$

Se $\widehat{T_i v} = m_i\hat{v}$, $i = 1,2$, scriviamo

(2.6) $Tv = T_1 v + T_2 v.$

Si osservi che supp ψ è compatto. Inoltre, siccome $m_2 \in C^\infty(R^n)$, $m_2(\xi) = O(|\xi|^{-2})$ per $|\xi| \to +\infty$, e $D^\alpha m_2(\xi) = O(|\xi|^{-2-|\alpha|})$ per $|\xi| \to +\infty$, per il Teorema di Hardy-Littlewood-Sobolev si ha

$$(2.7) \qquad \|T_2 v\|_{p'} \le C\|v\|_p \quad , \quad v \in C_0^\infty(R^n).$$

Per provare la (2.5) ci resta perciò da far vedere che

$$(2.8) \qquad \|T_1 v\|_{p'} \le C\|v\|_p \quad , \quad v \in C_0^\infty(R^n),$$

per un'opportuna costante $C = C(n) > 0$. A questo punto richiamiamo il Lemma di Tomas-Stein (cfr. $[G]_1$, Teorema 1.5). Ricordiamo la definizione dell'operatore di Tomas-Stein $Rf = \widehat{d\omega} * f$ (v. (1.46), dove $d\omega$ è la misura su S^{n-1}. Dalla (1.60) si ha

$$(2.9) \qquad Rf(x) = \int_{S^{n-1}} e^{2\pi i \langle x,\omega\rangle} \hat{f}(\omega)d\omega \ .$$

Nella dimostrazione del Teorema 1.5 in $[G]_1$ s'è fatto vedere che se $1 \le s \le \frac{2(n+1)}{n+3}$, e s' è tale che $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, allora

$$(2.10) \qquad \|Rf\|_{s'} \le C_{s,n}\|f\|_s \quad , \quad f \in L^s(R^n)$$

per una certa costante $C_{s,n} > 0$. (2.10) si riscrive

$$(2.11) \qquad \left\| \int_{S^{n-1}} e^{2\pi i \langle \cdot,\omega\rangle} \hat{f}(\omega)d\omega \right\|_{s'} \le C_{s,n}\|f\|_s \quad , \quad f \in L^s(R^n).$$

Ora $\left(\frac{2(n+1)}{n+3}\right)' = \frac{2(n+1)}{n-1} \le s' \le +\infty$, e quindi

$$(2.12) \qquad \frac{1}{s'} \le \frac{n-1}{2(n+1)} < \frac{n+3}{2(n+1)} \le \frac{1}{s} \ .$$

(2.12) dà

$$\frac{1}{s}-\frac{1}{s'} \geq \frac{n+3}{2(n+1)}-\frac{n-1}{2(n+1)}=\frac{2}{n+1} \quad . \tag{2.13}$$

Se prendiamo $s = \frac{2(n+1)}{n+3}$ in (2.11), e quindi $s' = \frac{2(n+1)}{n-1}$, allora risulta

$$\frac{1}{s}-\frac{1}{s'}=\frac{2}{n+1}<\frac{2}{n}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}$$

e inoltre (si osservi che $p = \frac{2n}{n+2}$, $p' = \frac{2n}{n-2}$)

$$p < s < s' < p'. \tag{2.14}$$

Ora sia $\eta \in C_0^\infty(R^n)$ e sia $\eta \equiv 1$ su suppψ. Se $\theta = \check{\eta}$, allora $\theta \in \mathscr{S}(R^n)$ e risulta

$$T_1 v = \theta * T_1 v. \tag{2.15}$$

Usando la (2.14) si può scegliere $r > 1$ tale che

$$\frac{1}{p'}=\frac{1}{s'}+\frac{1}{r}-1$$

e quindi per il Teorema di Young si ottiene

$$\|T_1 v\|_{p'} \leq \|\theta\|_r \, \|T_1 v\|_{s'} \leq C\|T_1 v\|_{s'}. \tag{2.16}$$

(2.8) sarà perciò dimostrata se facciamo vedere che esiste $C = C(n)>0$ tale che

$$\|T_1 v\|_{s'} \leq C\|v\|_p \quad , \quad v \in C_0^\infty(R^n). \tag{2.17}$$

Riscriviamo la (2.17) in coordinate polari:

$$(2.18)\qquad \|T_1 v\|_{s'} = \|(m_1\hat{v})^{\vee}\|_{s'} = \|\int_{R^n} e^{2\pi i\langle\cdot,\xi\rangle}\, m_1(\xi)\hat{v}(\xi)d\xi\|_{s'} =$$

$$= \|\int_0^{10^2}\int_{S^{n-1}} e^{2\pi i\langle\cdot,r\omega\rangle}\, \frac{\psi(r\omega)}{4\pi^2 r^2-1+4\pi i r\omega_n}\, \hat{v}(r\omega)d\omega\; r^{n-1}dr\|_{s'}\,.$$

Ora fissiamo $r>0$ e poniamo

$$(2.19)\qquad \hat{g}_r(\xi) = \frac{\psi(\xi)\hat{v}(\xi)}{4\pi^2 r^2-1+4\pi i\xi_n}\quad ,\quad \xi\in R^n.$$

Allora (2.18) si riscrive

$$(2.20)\qquad \|T_1 v\|_{s'} = \|\int_0^{10^2}\int_{S^{n-1}} e^{2\pi i\langle\cdot,r\omega\rangle}\hat{g}_r(r\omega)\,d\omega\; r^{n-1}dr\|_{s'}$$

$$\leq \int_0^{10^2}\|\int_{S^{n-1}} e^{2\pi i\langle\cdot,r\omega\rangle}\,\hat{g}_r(r\omega)d\omega\|_{s'}\, r^{n-1}dr,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la disuguaglianza di Minkowski. Ora osserviamo che un cambiamento di scala in (2.11) dà

$$(2.21)\qquad \|\int_{S^{n-1}} e^{2\pi i\langle\cdot,r\omega\rangle}\,\hat{f}(r\omega)d\omega\|_{s'} \leq C_{s,n}\, r^{-\frac{2n}{s'}}\|f\|_s\quad ,\quad f\in L^p(R^n).$$

Applicando la (2.21) e (2.20) con $f = g_r$ si ottiene

(2.22) $$\|T_1 v\|_{s'} \leq c_n \int_0^{10^2} r^{-\frac{2n}{s'}} \|g_r\|_s \, r^{n-1} \, dr.$$

Osserviamo adesso che per ogni fissato r>0

(2.23) $$g_r = \left(\frac{\psi(\xi)\hat{v}(\xi)}{4\pi^2 r^2 - 1 + 4\pi i \xi_n} \right)^{\vee}$$

Siccome per (2.14) $\frac{1}{s} < \frac{1}{p}$ se poniamo

$$\frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{s} - \frac{1}{p},$$

allora per il Teorema di Young

(2.24) $$\|g_r\|_s \leq \left\| \left(\frac{\psi(\xi)}{4\pi^2 r^2 - 1 + 4\pi i \xi_n} \right)^{\vee} \right\|_q \|v\|_p .$$

D'altra parte

(2.25) $$\left\| \left(\frac{\psi(\xi)}{4\pi^2 r^2 - 1 + 4\pi i \xi_n} \right)^{\vee} \right\|_q \leq \frac{C}{|4\pi^2 r^2 - 1|^{1/q}}$$

e quindi si ha finalmente

(2.26) $$\|T_1 v\|_{s'} \leq c_n \int_0^{10^2} r^{-\frac{2n}{s'}} |4\pi^2 r^2 - 1|^{-1/q} \, r^{n-1} dr \; \|v\|_p .$$

Resta da analizzare l'integrale in (2.26). Si noti che l'integrando ha una singolarità integrabile a $r = 0$ in quanto $s' = \frac{2(n+1)}{n-1} > 2$, e quindi

$$\frac{2n}{s'} - n+1 < 1.$$

Inoltre, non v'è alcun problema a $r = \frac{1}{2\pi}$ in quanto $q > 1$.

La dimostrazione di (2.17) è così completata, e con essa quella di (2.5), del Teorema 2.4 e, quindi, del Teorema 2.1. Come sopra detto quest'ultimo è solo un prototipo di una classe di risultati di unicità che nella loro versione più generale sono conseguenza della seguente disuguaglianza uniforme di tipo Sobolev. Sia $Q(\xi)$ una forma quadratica reale non singolare su R^n, $n \geq 3$, la quale per qualche $j \in \{2,\dots,n\}$ si possa scrivere

$$Q(\xi) = -\xi_1^2 - \dots - \xi_j^2 + \xi_{j+1}^2 + \dots + \xi_n^2. \tag{2.27}$$

Se $b = (b_1,b_2,\dots,b_n)\ C^n$, $a \in C$, sia $P(D)$ l'operatore differenziale del secondo ordine

$$P(D) = Q(D) + b\cdot\nabla + a. \tag{2.28}$$

Teorema 2.5. (di Kenig-Ruiz-Sogge). *Sia* $\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{2}{n}$. *Allora esiste una costante* $C = C(n) > 0$ *tale che*

$$\|u\|_{p'} \leq C\|P(D)u\|_p \quad , \quad u \in H^{2,p}(R^n). \tag{2.29}$$

Si osservi che se $P(D) = \Delta$, allora (2.29) è il Teorema di Hardy-Littlewood-Sobolev. Se invece $P(D) = \Box$, dove $\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ è l'operatore delle onde in R^n, allora la (2.29) è stata dimostrata da Strichartz in $[S]_1$. Se $P(D) = \Box + 1$, l'operatore di Klein-Gordon, allora la (2.29) è un caso particolare di un teorema di Marshall-Strauss-Wainger, [MSW].

Il Teorema 2.5 ha come conseguenza la seguente stima di tipo Carleman.

Teorema 2.6. (cfr. [KRS]). *Sia* $\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{2}{n}$, *e sia* $\nu \in R^n$ *arbitrario. Allora se* C *è come in* (2.29) *si ha*

$$(2.30) \qquad \|e^{\lambda\langle\nu,\cdot\rangle} u\|_{p'} \leq C\|e^{\lambda\langle\nu,\cdot\rangle} P(D)u\|_{p'}, \quad u \in C_0^\infty(R^n).$$

Si osservi che se $\nu = (0,0,\dots,0,1)$ e $P(D) = \Delta$ la (2.30) dà la (2.2). Il Teorema 2.6 implica il seguente risultato globale di unicità

Teorema 2.7. (cfr. [KRS]). *Sia* $\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{2}{n}$ *e* $P(D)$ *come nel Teorema 2.6. Sia* V $L^{n/2}(R^n)$ *e sia* $u \in H^{2,p}(R^n)$ *una soluzione di*

$$(2.31) \qquad |P(D)u| \leq |Vu| \quad in \ R^n.$$

Se il supp u *è contenuto in un semispazio* $H_\nu = \{x \in R^n | \langle x,\nu\rangle \geq 0\}$, *allora* $u \equiv 0$ *in* R^n.

Vi sono anche delle versioni locali del Teorema 2.7 nel caso in cui $Q(D) = \Delta$, oppure $Q(D) = \square$. Per quest'ultima si rinvia a [KRS]. Va qui sottolineato che la dimostrazione del Teorema 2.5 si poggia in modo determinante sul seguente Lemma di restrizione dovuto a Strichartz che nel caso non ellittico sostituisce il Lemma di Tomas Stein (2.11). Se Q è come in (2.27) denotiamo con $H^n_{\pm} = \{\xi \in R^n | Q(\xi) \gtrless 0\}$, mentre con $S^{n-1}_{\pm}$ denotiamo le "sfere" $S^{n-1}_{\pm} = \{\xi \in R^n | Q(\xi) = \pm 1\}$. Allora (cfr. ad. es. [GS] esiste una misura canonica $d\omega_{\pm}$ su $S^{n-1}_{\pm}$ tale che su $H^n_{\pm}$ $d\xi = \rho^{n-1} d\rho \, d\omega_{\pm}$, essendo $\xi = \rho\omega$ con $\omega \in S^{n-1}_{\pm}$.

Lemma 2.1. (cfr. [S]). *Sia* $n \geq 3$ *e siano* $\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{2}{n}$. *Allora esiste* $C = C_{n,p} > 0$ *tale che*

$$(2.32) \qquad \left\| \int_{S^{n-1}_{\pm}} e^{2\pi i\langle\cdot,\omega\rangle} \hat{f}(\omega) d\omega_{\pm} \right\|_{p'} \leq C\|f\|_p \quad , \quad f \in C_0^\infty(R^n).$$

Concludiamo questa breve analisi dei legami intercorrenti fra teoremi di restrizione e risultati d'unicità con un doveroso riferimento. Hörmander fu il primo ad usare, seguendo un suggerimento di P. Sjolin, un teorema di restrizione per dimostrare stime di tipo Carleman in [H]. Il suo risultato, relativo a operatori ellittici con parte principale più generale di quella del Teorema 2.6, non permette tuttavia la considerazione di termini d'ordine zero in $L^{\frac{n}{2}}$. Si veda a tal proposito la discussione in $[G]_2$.

Un'altra area di interesse collegata al problema della restrizione è quella delle stime a priori per equazioni di tipo iperbolico. Tale connessione è stata messa in risalto da I. Segal in [Se] nel caso bidimensionale, e successivamente ripresa da Strichartz e altri nel caso di dimensione arbitraria. Per ragioni di brevità ci limiteremo a un esempio significativo. Nel seguito se m R denotiamo con B l'operatore $B = (m^2-\Delta)^{1/2}$. Se $\square = \Delta - D_t^2$ in R^{n+1}, l'operatore lineare di Klein-Gordon è $\square - m^2$. Vale il seguente

<u>Teorema 2.8.</u> (cfr. [Se] e [S]). *Sia* u *una soluzione del problema di Cauchy* (n≧2)

$$(2.33)\qquad \begin{cases} (\square - m^2)u = g & \textit{in } R^{n+1} \\ u(\cdot,0) = f_0 \;,\; D_t u(\cdot,0) = f_1 \end{cases}$$

con $B^{1/2} f_0 \in L^2(R^n)$, $B^{-1/2} f_1 \in L^2(R^n)$.

(1) *se* $m \neq 0$,

$$\frac{2(n+1)}{n+3} \leq p \leq \frac{2(n+2)}{n+4}$$

e $g \in L^p(R^{n+1})$, *allora* $u \in L^q(R^{n+1})$ *con* $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ *e risulta per* $C = C(n) > 0$

$$(2.34)\qquad \|u\|_q \leq C(\|B^{1/2} f_0\|_2 + \|B^{-1/2} f_1\|_2 + \|g\|_p).$$

(2) *se* $m = 0$, *allora* (2.34) *vale con*

$$p = \frac{2(n+1)}{n+3} \quad e \quad q = \frac{2(n+1)}{n-1} \quad .$$

Per fissare le idee consideriamo il caso in cui $m \neq 0$.

Se $g \equiv 0$ la soluzione di (2.33) si scrive

$$(2.35) \qquad u(x,t) = \int_{R^n} e^{2\pi i(\langle x,\xi\rangle + t\sqrt{m^2+4\pi^2|\xi|^2})} \phi_+(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{m^2+4\pi^2|\xi|^2}}$$

$$+ \int_{R^n} e^{2\pi i(\langle x,\xi\rangle - t\sqrt{m^2+4\pi^2|\xi|^2})} \phi_-(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{m^2+4\pi^2|\xi|^2}}$$

dove $\phi_+ = \frac{1}{2}(Bf_o + i\hat{f}_1)$, $\phi_- = \frac{1}{2}(\widehat{Bf}_o - i\hat{f}_1)$.

Consideriamo l'iperboloide $\tau^2 - |\xi|^2 = (\frac{m}{2\pi})^2$.

La misura canonica sull'iperboloide è data da

$$d\sigma(\xi) = \frac{\pi d\xi}{\sqrt{m^2+4\pi^2|\xi|^2}}$$

La u in (2.35) risulta perciò nella forma $u = \mathscr{F}^{-1}(F\, d\sigma)$ su ognuno dei due "rami" dell'iperboloide. In tal caso la (2.34) è conseguenza della versione duale del risultato di restrizione

$$\|\hat{F}\, d\sigma\|_2 \quad \leq C\|F\|_p \quad ,$$

che è data da

$$\|(F\, d\sigma)\check{}\,\|_{p'} \leq C\|F\, d\sigma\|_2 .$$

Si confronti [S] per i dettagli.

Infine, citiamo i lavori $[M]_{1,2}$ e [MSW] per applicazioni di risultati di decadimento a questioni di scattering.

BIBLIOGRAFIA

[G]$_1$ N. GAROFALO, Sviluppi recenti in analisi armonica, Parte I, Seminario di Analisi Mat., Dip. di Mat., Bologna.

[G]$_{2,3}$ N. GAROFALO, Risultati d'unicità per operatori ellittici, Parte I, Parte II, Seminario di Analisi Mat., Dip. di Mat., Bologna.

[GL]$_1$ N. GAROFALO and F.H. LIN, Monotonicity Properties of Variational Integrals, A_p Weights and Unique Continuation, Indiana Univ. Math. J., 35, no. 2 (1986), 245-268.

[GL]$_2$ N. GAROFALO and F.H. LIN, Unique Continuation for Elliptic Operators: A Geometric-Variational Approach, Comm. on Pure and Applied Math.

[GS] I.M. GELFAND and G.E. SHILOV, Generalized Functions, vol. I, Academic Press (1964).

[H] L. HÖRMANDER, Uniqueness Theorems for Second Order Elliptic Differential Equations, Comm. in PDE 8(1) (1983), 21-64.

[JK] D. JERISON and C.E. KENIG, Unique Continuation and Absence of Positive Eigenvalues of Schrödinger Operators, Annals of Math. 121 (1985), 463-488.

[K]$_1$ C.E. KENIG, Continuation Theorems for Schrödinger Operators, Preprint.

[K]$_2$ C.E. KENIG, Carleman Estimates, Uniform Sobolev Inequalities for Second Order Differential Operators, and Unique Continuation Theorems, Berkeley, July 1986, International Congress of Mathematicians.

[KRS] C.E. KENIG, A. RUIZ and C.D. SOGGE, Sobolev Inequalities and Unique Continuation for Second Order Constant Coefficient Differential Operators, Preprint.

[M]$_1$ B. MARSHALL, The Fourier Transforms of Smooth Measures on Hypersurfaces of R^{n+1}, Canadian J. Math., 38 (1986), 328-359.

[M]$_2$ B. MARSHALL, Mixed Norm Decay for the Klein-Gordon Equation with Initial Data in L^p, Canadian Math. Bull., 29(1) (1986), 11-19.

[MSW] B. MARSHALL, W. STRAUSS and S. WAINGER, L^p-L^q Estimates for the Klein-Gordon Equation, J. Math. Pures et Appl. 59(1980), 417-440.

[RS] M. REED and B. SIMON, Methods for Modern Math. Physics, vol. IV, Academic Press (1978).

[Se] I. SEGAL, Space-Time Decay for Solutions of Wave Equations, Advances in Math. 22 (1976), 305-311.

[S] R.S. STRICHARTZ, Restrictions of Fourier Transforms to Quadratic Surfaces and Decay of Solutions of Wave Equations, Duke Math. J. 44 (3) (1977), 705-714.